Ví dụ trang 3

Giải siêu chậm – bóc từng bước – không nhảy cóc, đúng kiểu **người yếu tích phân đọc cũng theo được**.

Ví dụ trang 3 là **ví dụ áp dụng công thức Green + so sánh 3 cách**, cụ thể là:

VÍ DỤ (TRANG 3 FILE BÀI GIẢNG)

Cho trường vectơ:

$$\vec{F}(x, y) = (y + 1,\ x)$$

Gọi C là **đường biên của tam giác** có các đỉnh:

- $O(0, 0)$
- $A(2, 0)$
- $B(0, 5)$

Đường C được định hướng theo chiều kim đồng hồ.

Yêu cầu:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}\,?$$

PHẦN 0 – NHẬN DẠNG BÀI TOÁN (CỰC QUAN TRỌNG)

Nhìn đề, ta thấy:

- Có **trường vectơ** → không phải tích phân thường
- Có $P\,dx + Q\,dy$ → tích phân đường **loại 2**
- Đường **kín** → có thể dùng **Green**
- Nhưng ví dụ yêu cầu **làm bằng nhiều cách** → ta làm **Cách 1: tham số hóa**, sau đó mới hiểu vì sao Green tiện

CÁCH 1 – TÍNH TRỰC TIẾP TRÊN TỪNG CẠNH

Bước 1: Viết rõ công thức tích phân đường loại 2

Với:

$$\vec{F} = (P, Q) = (y + 1,\ x)$$

Ta có:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C (y + 1)\, dx + x\, dy$$

Bước 2: Chia đường C thành 3 đoạn

Vì C là tam giác nên:

$$C = OB \cup BA \cup AO$$

Ta sẽ tính **từng đoạn**, rồi cộng lại.

ĐOẠN 1: OB (từ $O(0, 0) \to B(0, 5)$)

Bước 2.1: Tham số hóa OB

Quan sát:

- Trên OB: $x = 0$
- y chạy từ $0 \to 5$

Chọn tham số:

$$\vec{r}(y) = (0,\ y), \quad 0 \le y \le 5$$

Bước 2.2: Tính dx, dy

Vì:

$$x(y) = 0 \Rightarrow dx = 0$$
$$y = y \Rightarrow dy = dy$$

Bước 2.3: Thay vào tích phân

Nhớ lại:

$$\int_C (y + 1)\, dx + x\, dy$$

Trên OB:

- $dx = 0$
- $x = 0$

Nên:

$$(y + 1)dx + xdy = (y + 1) \cdot 0 + 0 \cdot dy = 0$$

$\Rightarrow$ **Toàn bộ tích phân trên OB bằng 0**

ĐOẠN 2: BA (từ $B(0,5) \to A(2,0)$)

Bước 3.1: Tham số hóa đoạn thẳng BA

Công thức chuẩn đoạn thẳng:

$$\vec{r}(t) = (1-t)B + tA, \quad 0 \le t \le 1$$

Thay tọa độ:

$$\vec{r}(t) = (1-t)(0,5) + t(2,0) = (2t,\ 5-5t)$$

Bước 3.2: Tính đạo hàm

$$x(t) = 2t \Rightarrow x'(t) = 2$$
$$y(t) = 5 - 5t \Rightarrow y'(t) = -5$$

Bước 3.3: Tính P, Q

Nhớ:

$$P = y + 1, \quad Q = x$$

Thay tham số:

$$P = (5-5t) + 1 = 6 - 5t$$
$$Q = 2t$$

Bước 3.4: Lập tích phân

Công thức:

$$\int (P\,dx + Q\,dy) = \int [P\,x'(t) + Q\,y'(t)]dt$$

Thay số:

$$= \int_0^1 \big[(6-5t)\cdot 2 + (2t)\cdot(-5)\big]dt$$

Rút gọn:

$$= \int_0^1 (12 - 10t - 10t)\,dt = \int_0^1 (12 - 20t)\,dt$$

Bước 3.5: TÍNH TÍCH PHÂN (CHẬM)

$$\int (12 - 20t)\,dt = 12t - 10t^2$$

Thế cận:

$$(12\cdot 1 - 10\cdot 1^2) - (0) = 2$$

$\Rightarrow$ **Đoạn BA cho kết quả = 2**

ĐOẠN 3: AO (từ $A(2,0) \to O(0,0)$)

Bước 4.1: Chú ý hướng

Đề yêu cầu **đi theo chiều kim đồng hồ**, nên:

- AO đi từ **A về O**
- Nhưng tham số tự nhiên hay dùng là từ $0 \to 2$

$\Rightarrow$ Vì vậy **phải có dấu trừ**

Bước 4.2: Tham số hóa

Chọn:

$$\vec{r}(x) = (x, 0), \quad 0 \leq x \leq 2$$

Nhưng vì đi ngược hướng nên:

$$\int_{AO} = -\int_0^2$$

Bước 4.3: Thay vào tích phân

Trên AO:

- $y = 0 \Rightarrow dy = 0$
- $dx = dx$

$$(y+1)dx + xdy = 1 \cdot dx$$

Vậy:

$$\int_{AO} = -\int_0^2 1\, dx = -2$$

BƯỚC CUỐI: CỘNG 3 ĐOẠN

$$\int_C = 0 + 2 + (-2) = 0$$

KẾT LUẬN

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

TẠI SAO KẾT QUẢ = 0? (TRỰC GIÁC)

Ta có:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

→ **Trường bảo toàn**
→ **Đường kín ⇒ tích phân = 0**

(Cách 3 trong slide dùng ý này để "chốt nhanh")

Nếu bạn muốn, bước tiếp theo mình có thể:

- Làm **lại ví dụ này bằng Green từ đầu**
- So sánh **3 cách → khi nào dùng cách nào**
- Rút ra **1 công thức nhận dạng "nhìn phát biết = 0"**

Chọn tiếp đi, Screw theo tới cùng.

Ví dụ trang 3: Tích phân đường loại 2 – Giải bằng Green

⇒ Siêu chậm – từng dòng – giải thích bản chất – người yếu tích phân đọc vẫn hiểu vì sao làm thế
⇒ không tham số hóa từng cạnh nữa

VÍ DỤ TRANG 3 (GIẢI BẰNG GREEN)

Cho trường vectơ:

$$\vec{F}(x, y) = (y + 1,\ x)$$

Gọi C là đường biên của tam giác có các đỉnh:

- $O(0, 0)$
- $A(2, 0)$
- $B(0, 5)$

C được định hướng theo chiều kim đồng hồ.

Tính:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

PHẦN 1 – NHẬN DẠNG NGAY ĐỂ DÙNG GREEN

Ta viết tích phân dưới dạng chuẩn:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

với:

$$P(x, y) = y + 1, \qquad Q(x, y) = x$$

Quan sát:

- C là đường kín
- P, Q khả vi liên tục
- Miền D là tam giác (miền tốt)

⇒ DÙNG ĐỊNH LÝ GREEN ĐƯỢC

PHẦN 2 – VIẾT CÔNG THỨC GREEN (KHÔNG NHẢY BƯỚC)

Định lý Green nói rằng:

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

CÔNG THỨC NÀY PHẢI THUỘC

PHẦN 3 – TÍNH CÁC ĐẠO HÀM RIÊNG (CỰC DỄ)

Ta tính từng cái rất chậm.

Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Tính $\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$P = y + 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Lấy hiệu

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0$$

Đây là điểm mấu chốt của bài

PHẦN 4 – VIẾT TÍCH PHÂN KÉP

Thay vào công thức Green:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D 0\,dA$$

Tích phân của 0 trên bất kỳ miền nào cũng bằng 0

PHẦN 5 – KẾT LUẬN THEO GREEN

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

PHẦN 6 – NHƯNG CÒN 1 CHI TIẾT: HƯỚNG ĐƯỜNG ĐI

Công thức Green chuẩn:

- C phải đi ngược chiều kim đồng hồ

Nhưng đề bài:

- C đi theo chiều kim đồng hồ

$\Rightarrow$ Vậy ta phải đổi dấu

Nhưng:

$$0 \times (-1) = 0$$

$\Rightarrow$ Kết quả vẫn bằng 0

GIẢI THÍCH BẢN CHẤT (CHO NGƯỜI YẾU)

Vì sao không cần tính miền D?

Vì:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$\Rightarrow$ Tức là:

- Trường không có xoáy
- Trường bảo toàn
- Công quanh đường kín luôn bằng 0

Đây chính là ý nghĩa vật lý & toán học của bài.

CÁCH NHÌN "NHÌN PHÁT CHỐT LUÔN" (CỰC QUAN TRỌNG)

Gặp bài dạng:

$$\int_C (y+1)\,dx + x\,dy$$

Chỉ cần làm trong đầu:

- $Q_x = 1$
- $P_y = 1$
- Hiệu $= 0$
- Đường kín

$\Rightarrow$ CHỐT: BẰNG 0, KHỎI TÍNH

(Đúng tinh thần slide muốn dạy)

Ví dụ trang 3 – Cách 3: Trường bảo toàn

$\Rightarrow$ **không tham số hóa**
$\Rightarrow$ **không dùng Green để tính tích phân kép**
$\Rightarrow$ mà dùng **TRƯỜNG BẢO TOÀN – HÀM THẾ (Newton–Leibniz cho tích phân đường)**

Và mình sẽ làm **cực chậm**, giải thích **vì sao mỗi bước được phép làm**, đúng cho **người yếu tích phân**.

VÍ DỤ TRANG 3 – CÁCH 3 (TRƯỜNG BẢO TOÀN)

Cho trường vectơ:

$$\vec{F}(x, y) = (y + 1,\ x)$$

Gọi C là **đường biên tam giác** với các đỉnh:

- $O(0, 0)$
- $A(2, 0)$
- $B(0, 5)$

Đường C là **đường kín** (đi một vòng rồi quay lại điểm cũ).

Tính:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

PHẦN 1 – VIẾT BÀI TOÁN VỀ DẠNG CHUẨN

Tích phân đường loại 2 có dạng:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_C P\,dx + Q\,dy$$

Với:

$$P(x, y) = y + 1, \qquad Q(x, y) = x$$

Viết ra **rõ ràng như vậy** để chuẩn bị kiểm tra bảo toàn.

PHẦN 2 – KIỂM TRA TRƯỜNG CÓ BẢO TOÀN KHÔNG?

Bước 2.1: Nhớ điều kiện (PHẢI THUỘC)

Trong mặt phẳng, nếu:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

và miền đang xét là **miền mở, đơn liên / hình sao**
$\Rightarrow$ thì **trường là bảo toàn**

Bước 2.2: Tính từng đạo hàm (CỰC CHẬM)

Tính $\dfrac{\partial P}{\partial y}$

$$P = y + 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Tính $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$$Q = x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Bước 2.3: So sánh

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$\Rightarrow$ **BẰNG NHAU**

Miền tam giác là miền **tốt** (không lỗ thủng)

$\Rightarrow$ **KẾT LUẬN: $\vec{F}$ LÀ TRƯỜNG BẢO TOÀN**

PHẦN 3 – Ý NGHĨA CỦA "TRƯỜNG BẢO TOÀN" (RẤT QUAN TRỌNG)

Trường bảo toàn nghĩa là:

$\Rightarrow$ Tồn tại **hàm thế** $\phi(x, y)$ sao cho:

$$\nabla \phi = \vec{F}$$

tức là:

$$\begin{cases} \phi_x = P = y + 1 \\ \phi_y = Q = x \end{cases}$$

PHẦN 4 – TÌM HÀM THẾ $\phi(x, y)$ (LÀM CỰC CHẬM)

Bước 4.1: Tích phân theo x

Từ:

$$\phi_x = y + 1$$

Ta tích phân theo x:

$$\phi(x, y) = \int (y + 1)\, dx = x(y + 1) + g(y)$$

$g(y)$ là **"hằng số theo x"**
Bước này **rất nhiều người yếu hay quên**

Bước 4.2: Lấy đạo hàm theo y

$$\phi_y = \frac{\partial}{\partial y}[x(y + 1) + g(y)] = x + g'(y)$$

Bước 4.3: So với $\phi_y = Q = x$

Ta có:

$$x + g'(y) = x \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = \text{hằng số}$$

Hằng số **không ảnh hưởng tích phân đường**
$\Rightarrow$ Có thể bỏ

Bước 4.4: Viết hàm thế

$$\boxed{\phi(x, y) = x(y + 1)}$$

PHẦN 5 – ÁP DỤNG ĐỊNH LÝ NEWTON–LEIBNIZ CHO TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

Với trường bảo toàn:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \phi(\text{điểm cuối}) - \phi(\text{điểm đầu})$$

PHẦN 6 – ÁP DỤNG CHO ĐƯỜNG KÍN

Đường C là **đường kín**

$\Rightarrow$ Điểm đầu = điểm cuối

Gọi là A, ta có:

$$\phi(A) - \phi(A) = 0$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG (CÁCH 3)

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0}$$

TẠI SAO CÁCH 3 LÀ "CÁCH NHÌN CỦA NGƯỜI GIỎI"?

Vì chỉ cần:

1. Tính P_y, Q_x
2. Thấy **bằng nhau**
3. Thấy **đường kín**

$\Rightarrow$ **CHỐT NGAY = 0**, không cần:

- tham số hóa
- không cần tích phân
- không cần Green

TÓM TẮT 5 GIÂY KHI ĐI THI

Gặp bài:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

Nếu:

- $P_y = Q_x$
- C kín

$\Rightarrow$ **TIN CHUẨN ANH NHÉ**
$\Rightarrow$ Kết quả = **0**

Ví dụ trang 17: Tính diện tích hình ellipse

VÍ DỤ TRANG 17

Tính diện tích hình ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

PHẦN 0 – ĐỪNG LAO VÀO TÍNH NGAY (NHẬN DẠNG TRƯỚC)

Câu hỏi đề bài thật sự là gì?

$\Rightarrow$ Tính diện tích miền phẳng được bao bởi ellipse.

Đây KHÔNG phải tích phân thường
Đây KHÔNG phải tích phân đường loại 1 hay 2 thông thường
Đây là bài diện tích miền phẳng D

PHẦN 1 – VŨ KHÍ DÙNG TRONG SLIDE: CÔNG THỨC GREEN TÍNH DIỆN TÍCH

Trong bài giảng, người ta dùng hệ quả của định lý Green:

$$\boxed{|D| = \frac{1}{2} \oint_C (x\,dy - y\,dx)}$$

Trong đó:

- $C = \partial D$ là đường biên ellipse
- Định hướng ngược chiều kim đồng hồ

$\Rightarrow$ Toàn bộ bài toán bây giờ chỉ còn:

Tính tích phân đường $\oint_C (x\,dy - y\,dx)$

PHẦN 2 – THAM SỐ HÓA ELLIPSE (BƯỚC QUAN TRỌNG NHẤT)

Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow$ Cách tham số hóa chuẩn – phải thuộc lòng:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Lý do:

- $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$
- Đúng phương trình ellipse
- Chạy ngược chiều kim đồng hồ (chuẩn cho Green)

PHẦN 3 – TÍNH dx, dy (RẤT DỄ SAI NẾU VỘI)

Ta có:

$$x = a\cos t \Rightarrow dx = -a\sin t\,dt$$

$$y = b\sin t \Rightarrow dy = b\cos t\,dt$$

$\Rightarrow$ Ghi rõ ra, không nhẩm.

PHẦN 4 – THAY VÀO BIỂU THỨC $x\,dy - y\,dx$

Ta tính từng hạng một, cực chậm:

Tính $x\,dy$

$$x\,dy = (a\cos t)(b\cos t\,dt) = ab\cos^2 t\,dt$$

Tính $y\,dx$

$$y\,dx = (b\sin t)(-a\sin t\,dt) = -ab\sin^2 t\,dt$$

Lấy hiệu

$$\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= ab\cos^2 t\,dt - (-ab\sin^2 t\,dt) \\ &= ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,dt \end{aligned}$$

DÙNG HẰNG ĐẲNG THỨC:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$\Rightarrow$ Suy ra:

$$x\,dy - y\,dx = ab\,dt$$

Đây là điểm mấu chốt của bài.

PHẦN 5 – LẬP TÍCH PHÂN (CỰC KỲ ĐơN GIẢN)

Quay lại công thức diện tích:

$$|D| = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)$$

Thay vào:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt$$

PHẦN 6 – TÍNH TÍCH PHÂN (CHẬM NHƯ RÙA)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} ab\,dt &= ab\int_0^{2\pi} dt \\ &= ab(2\pi) \end{aligned}$$

PHẦN 7 – NHÂN HỆ SỐ 1/2 CUỐI CÙNG

$$|D| = \frac{1}{2}\cdot 2\pi ab = \pi ab$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\boxed{\text{Diện tích ellipse } = \pi ab}$$

TỔNG KẾT TƯ DUY (CỰC QUAN TRỌNG CHO NGƯỜI YẾU)

$\Rightarrow$ Bài này KHÔNG phải nhớ công thức diện tích ellipse trước
$\Rightarrow$ Mà là:

1. Dùng Green
2. Dùng tham số hóa ellipse
3. Thay vào $x\,dy - y\,dx$
4. Tự nhiên ra πab

Ví dụ trang 18: Tính diện tích miền bị chặn bởi đường cong tham số

VÍ DỤ TRANG 18

Tính diện tích miền bị chặn bởi đường cong

$$\vec{r}(t) = (\sin t \cos t,\ \sin t), \quad 0 \le t \le \pi$$

PHẦN 0 – NHẬN DẠNG BÀI TOÁN (RẤT QUAN TRỌNG)

Đề bài hỏi: **diện tích miền phẳng**.

$\Rightarrow$ Vậy đây **không phải**:

- tích phân thường,
- không phải $\int f\,ds$,
- không phải $\int P\,dx + Q\,dy$ để tính công.

$\Rightarrow$ Mà là **diện tích miền kín**, nên ta dùng:

$$\boxed{|D| = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx)}$$

Công thức này là **hệ quả của định lý Green**
Dùng khi **biết đường biên dưới dạng tham số**

PHẦN 1 – KIỂM TRA ĐƯỜNG CÓ KÍN KHÔNG?

Đường cong:

$$\vec{r}(t) = (\sin t \cos t,\ \sin t)$$

Ta kiểm tra **điểm đầu – điểm cuối**.

Khi $t = 0$

$$x(0) = \sin 0 \cos 0 = 0, \quad y(0) = \sin 0 = 0$$

$\Rightarrow$ Bắt đầu tại **(0,0)**

Khi $t = \pi$

$$x(\pi) = \sin\pi\cos\pi = 0, \quad y(\pi) = \sin\pi = 0$$

$\Rightarrow$ Kết thúc cũng tại **(0,0)**

Vậy đường cong **là đường kín**
Áp dụng công thức Green được

PHẦN 2 – VIẾT RÕ $x(t)$, $y(t)$

Từ tham số hóa:

$$\begin{cases} x(t) = \sin t\cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Bước này **phải viết riêng ra**, không được để trong đầu.

PHẦN 3 – TÍNH dx, dy (RẤT DỄ SAI)

Ta tính **đạo hàm theo t**.

Tính dx

$$x(t) = \sin t\cos t$$

Dùng công thức đạo hàm tích:

$$(\sin t\cos t)' = \cos t\cos t - \sin t\sin t$$

$$\Rightarrow dx = (\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

Tính dy

$$y(t) = \sin t \Rightarrow dy = \cos t\,dt$$

PHẦN 4 – LẬP BIỂU THỨC $x\,dy - y\,dx$

Ta tính **từng phần**, rất chậm.

Bước 4.1: Tính $x\,dy$

$$x\,dy = (\sin t\cos t)(\cos t\,dt) = \sin t\cos^2 t\,dt$$

Bước 4.2: Tính $y\,dx$

$$y\,dx = \sin t(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

Bước 4.3: Lấy hiệu

$$x\,dy - y\,dx = \sin t \cos^2 t - \sin t(\cos^2 t - \sin^2 t)$$

Khai triển ngoặc:

$$= \sin t \cos^2 t - \sin t \cos^2 t + \sin t \sin^2 t$$

$\Rightarrow$ **Hai hạng đầu triệt tiêu nhau**

$$= \sin t \sin^2 t = \sin^3 t$$

Đây là bước **then chốt**, làm chậm là đúng.

PHẦN 5 – LẬP TÍCH PHÂN DIỆN TÍCH

Quay lại công thức:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (x\,dy - y\,dx)$$

Thay vào:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^3 t\,dt$$

PHẦN 6 – TÍNH TÍCH PHÂN $\int \sin^3 t\,dt$ (SIÊU CHẬM)

Bước 6.1: Viết lại $\sin^3 t$

$$\sin^3 t = \sin t(1 - \cos^2 t)$$

Bước 6.2: Đổi biến

Đặt:

$$u = \cos t \Rightarrow du = -\sin t\,dt$$

Bước 6.3: Đổi cận

- Khi $t = 0$: $u = \cos 0 = 1$
- Khi $t = \pi$: $u = \cos \pi = -1$

Bước 6.4: Đổi tích phân

$$\int_0^{\pi} \sin t(1 - \cos^2 t)\,dt = \int_1^{-1} (1 - u^2)(-du)$$

Đổi chiều cận:

$$= \int_{-1}^{1} (1 - u^2)\,du$$

Bước 6.5: Tính tích phân theo u

$$\int (1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3}$$

Thế cận:

$$\left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

PHẦN 7 – NHÂN HỆ SỐ 1/2

$$|D| = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\boxed{\text{Diện tích miền} = \frac{2}{3}}$$

TỔNG KẾT TƯ DUY CHO NGƯỜI YẾU

⇒ Gặp bài:

- cho **tham số hóa đường cong**
- hỏi **diện tích**

⇒ Làm **Y HỆT**:

1. Kiểm tra đường kín
2. Dùng $\frac{1}{2}\oint (x\,dy - y\,dx)$
3. Tính dx, dy **cẩn thận**
4. Rút gọn ra **1 tích phân 1 biến**
5. Tính chậm

Ví dụ trang 19: Tính diện tích trong tọa độ cực

VÍ DỤ TRANG 19

Tính diện tích của miền $D \subset \mathbb{R}^2$ bị chặn bởi:

- đồ thị trong tọa độ cực
$$r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
- và tia Ox.

PHẦN 0 – NHẬN DẠNG ĐÚNG BÀI TOÁN (RẤT QUAN TRỌNG)

$\Rightarrow$ Đề hỏi: diện tích miền phẳng
$\Rightarrow$ Miền được cho trực tiếp trong tọa độ cực

Vậy:

- KHÔNG cần Green
- KHÔNG cần tích phân đường
- DÙNG CÔNG THỨC DIỆN TÍCH TRONG TỌA ĐỘ CỰC

PHẦN 1 – NHỚ CÔNG THỨC DIỆN TÍCH TRONG TỌA ĐỘ CỰC

Nếu miền D được cho bởi:
$$0 \leq r \leq f(\theta), \quad \alpha \leq \theta \leq \beta$$
thì:
$$\boxed{|D| = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 \, d\theta}$$
Công thức này phải thuộc lòng
Nó chính là phiên bản "Green" đã được rút gọn cho tọa độ cực.

PHẦN 2 – ÁP DỤNG TRỰC TIẾP VÀO BÀI TOÁN

Trong bài này:

- $f(\theta) = \sqrt{\theta}$
- $\alpha = 0$
- $\beta = 2\pi$

Thay vào công thức:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sqrt{\theta})^2 \, d\theta$$

PHẦN 3 – RÚT GỌN BIỂU THỨC (ĐỪNG NHẢY BƯỚC)

$$(\sqrt{\theta})^2 = \theta$$

Nên:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta \, d\theta$$

PHẦN 4 – TÍNH TÍCH PHÂN $\int \theta \, d\theta$ (SIÊU CƠ BẢN)

Bước 4.1: Nguyên hàm

$$\int \theta \, d\theta = \frac{\theta^2}{2}$$

Bước 4.2: Thế cận

$$\int_0^{2\pi} \theta \, d\theta = \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{(2\pi)^2}{2} - 0$$

$$= \frac{4\pi^2}{2} = 2\pi^2$$

PHẦN 5 – NHÂN HỆ SỐ $\frac{1}{2}$ CUỐI CÙNG

Nhớ lại:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \theta \, d\theta$$

Thay kết quả:

$$|D| = \frac{1}{2} \cdot 2\pi^2 = \boxed{\pi^2}$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\boxed{\text{Diện tích miền } D = \pi^2}$$

GIẢI THÍCH TRỰC GIÁC (CHO NGƯỜI YẾU)

- Khi θ tăng $\to$ bán kính $r = \sqrt{\theta}$ tăng
- Đường cong xoắn ốc đi ra xa gốc tọa độ
- Miền D là phần "quét" được khi θ chạy từ 0 đến 2π
- Công thức $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ chính là diện tích một lát quạt nhỏ

$\Rightarrow$ Cộng tất cả các "lát quạt" $\to$ ra diện tích.

CHECKLIST 5 GIÂY KHI GẶP DẠNG NÀY

Gặp đề:

- "tọa độ cực"
- "tính diện tích"

$\Rightarrow$ Làm ngay:

1. Viết $|D| = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int r^2\, d\theta$
2. Bình phương r
3. Tích phân theo θ
4. Nhân $\frac{1}{2}$